Lernziele zur Jahrgangsarbeit 10

Schuljahr 2016/2017

I. Analysis

① Du kannst die Ableitung einer Funktion bestimmen. [Summenregel, Faktorregel, Ableitung von x^z, sin(x) und cos(x)]

② Du kannst Gleichungen lösen. [p-q-Formel oder a-b-c-Formel, Faktorisieren, Substituieren]

③ Du kannst zu einem gegebenen Graphen einer Funktion den Graphen der zugehörigen Ableitung skizzieren.

④ Du kannst den Graphen einer Funktion, den Graphen der ersten Ableitung und den Graphen der zweiten Ableitung deuten. [$f \rightarrow f'$; $f'' \mid f' \rightarrow f$; $f'' \mid f'' \rightarrow f$; f']

⑤ Du kannst ganzrationale Funktionen auf Extremstellen und Wendestellen untersuchen.

⑥ Du kannst die Funktionsvorschrift einer trigonometrischen Funktion aus dem Schaubild herleiten. [Amplitude, Periode, Verschiebung in x- und y-Richtung]

⑦ Du kannst die Gleichung der Tangente an den Graphen einer ganzrationalen Funktion an einer gegebenen Stelle aufstellen.

⑧ Du kannst die Funktionsvorschrift einer Funktion so verändern, dass der Graph in x-Richtung oder y-Richtung um eine gegebene Anzahl von LE verschoben, mit einem gegebenen Faktor gestreckt oder an den Koordinatenachsen gespiegelt wird.

⑨ Du kannst ganzrationale Funktionen auf Symmetrie [Achsensymmetrie zur y-Achse und Punktsymmetrie zum Ursprung] untersuchen und das Verhalten ihrer Funktionswerte für $x \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow +\infty$ angeben.

⑩ Du kannst die Bedeutung der mittleren und momentanen Änderungsrate einer Funktion bei Anwendungsaufgaben beschreiben.

II. Analytische Geometrie

① Du kannst Punkte, Strecken und Geraden in ein geeignetes räumliches Koordinatensystem zeichnen.

② Du kannst mit Vektoren rechnen. [Addition, Skalarmultiplikation, Länge]

③ Du kannst die Gleichung einer Geraden aufstellen. [Gerade durch zwei Punkte, parallele Gerade]

④ Du kannst die Lage zweier Geraden untersuchen (parallel, identisch, windschief, schneidend) und gegebenenfalls den Schnittpunkt berechnen.

⑤ Du kannst geradlinige Bewegungen mit Hilfe von Geraden modellieren und die Geschwindigkeit einer geradlinigen Bewegung bei gegebener Gleichung bestimmen.

III. Wahrscheinlichkeitsrechnung

① Du kannst den Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsvariable berechnen und deuten.

② Du kannst die Wahrscheinlichkeit für genau x Treffer bei einer binomialverteilten Zufallsvariable berechnen. [Binomialpdf]

③ Du kannst die Wahrscheinlichkeit für mindestens, mehr als, höchstens und weniger als x Treffer bei einer binomialverteilten Zufallsvariable berechnen. [Binomialcdf]

④ Du kannst mit der Bernoulli-Formel umgehen.

⑤ Du kannst ein Baumdiagramm zeichnen und die Pfadregeln anwenden.

Mathematik Jahrgangsarbeit 10

Schuljahr 2016/2017 Bearbeitungszeit: 90 Minuten zugelassenes Hilfsmittel: WTR

Name: **Punkte: / 48** **Ø:** **Note:**

I. Analysis /24

Aufgabe I.1 /2

Bestimme die Ableitung.

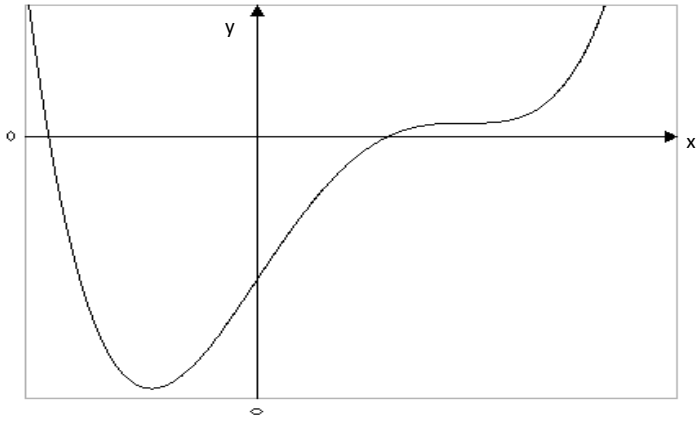
a) $f(x) = x^3 + 5\cos(x)$ b) $g(x) = \frac{1}{x} + 18$

Aufgabe I.2 /2

Löse die Gleichung: $2x^3 - 8x^2 - 10x = 0$

Aufgabe I.3 /2

Skizziere die Ableitung in das gleiche Koordinatensystem.

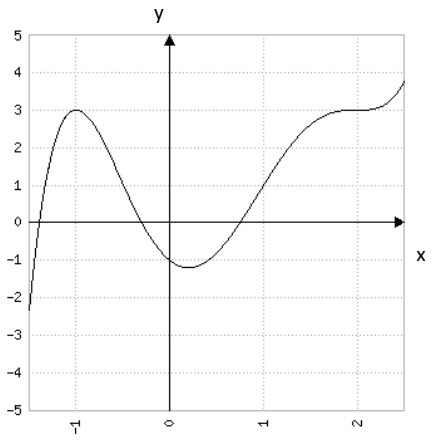


Aufgabe I.4 /2

Die Abbildung rechts zeigt den Graphen der ersten Ableitung einer Funktion f. Begründe, warum folgende Aussagen wahr sind.

a) f''(1) > 0.

b) Der Graph von f hat mindestens zwei Wendepunkte.

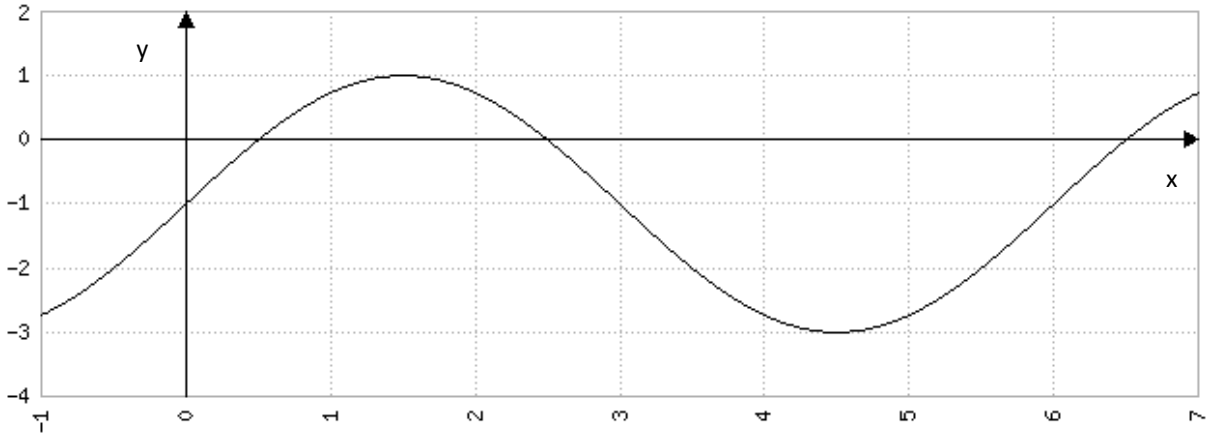


Aufgabe I.5 **/6**

Untersuche die Funktion $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 5$ auf Extremstellen und Wendestellen. Berechne anschließend die Koordinaten aller Hoch-, Tief- und Wendepunkte.

Aufgabe I.6 **/2**

Gib zum Graph in der Abbildung eine mögliche Funktionsvorschrift an.



Aufgabe I.7 **/2**

Berechne die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 5$ an der Stelle $x_0 = 1$.

Aufgabe I.8 **/2**

Der Graph der Funktion $f(x) = x^4$ soll erst an der x-Achse gespiegelt werden und anschließend um 3 LE in negative x-Richtung verschoben werden. Gib die zu dem entstandenen Graphen passende Funktionsvorschrift g(x) an.

Aufgabe I.9 **/2**

Untersuche die Funktion $f(x) = -x^8 + 7x^2 - 6$ auf Symmetrie und gib das Verhalten der Funktionswerte für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$ an.

Aufgabe I.10 **/2**

In einer Schulmensa wird das Essen nach der Zubereitung in Warmhaltebehältern gelagert, bis es an die Schüler ausgegeben wird. Die Temperatur des Essens zum Zeitpunkt t nach dem Umfüllen kann näherungsweise beschrieben werden durch die Funktion f(t) mit t in Minuten und f(t) in °C. Interpretiere die Ergebnisse der folgenden Berechnungen:

a) $\frac{f(20)-f(0)}{20} \approx -0{,}8$ b) $f'(5) \approx -1{,}2$

II. Analytische Geometrie /12

Aufgabe II.1 **/8**

Gegeben sind die Punkte A(3|1|4), B(0|-2|5) und C(-1|0|1).

a) Zeichne das Dreieck ABC in ein geeignetes räumliches Koordinatensystem.

b) Berechne die Koordinaten des Punktes D mit $\vec{d} = 2 \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$.

c) Berechne den Abstand der Punkte B und C.

d) Die Punkte A und B liegen auf der Geraden g. Der Punkt C liegt auf der Geraden h, die parallel zu g ist. Gib mögliche Gleichungen der Geraden g und h an.

Aufgabe II.2 **/2**

Zeige, dass die Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 3 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ -18 \\ -15 \end{pmatrix}$ identisch sind.

Aufgabe II.3 **/2**

Ein Objekt bewegt sich geradlinig durch den Raum. Die Bewegung des Objektes lässt sich durch folgende Gleichung beschreiben:

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 200 \\ 180 \\ 789 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 33 \\ 22 \\ 7 \end{pmatrix}$; r in Sekunden nach dem Beobachtungsbeginn; Koordinaten in Metern

Berechne die Geschwindigkeit des Objektes. Gib die Geschwindigkeit in Kilometer pro Stunde an.

III. Wahrscheinlichkeitsrechnung /12

Aufgabe III

Ein Fahrkartenkontrolleur weiß von seinem Arbeitgeber, dass erfahrungsgemäß 3% aller kontrollierten Fahrgäste ohne gültigen Fahrschein unterwegs sind. Fahrgäste ohne gültigen Fahrschein werden als Schwarzfahrer bezeichnet.

a) Mit wie vielen Schwarzfahrern kann er etwa rechnen, wenn er an einem Vormittag 220 Fahrgäste kontrolliert? Berechne. /1

b) Er kontrolliert an einem Tag genau 400 Fahrgäste. Berechne die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse: /5

A: Er erwischt an einem Tag genau 12 Schwarzfahrer.

B: Er erwischt an einem Tag höchstens 5 Schwarzfahrer.

C: Er erwischt an einem Tag mehr als 15 Schwarzfahrer.

D: Er erwischt an einem Tag 10 bis 14 Schwarzfahrer.

c) Gib ein Ereignis E an, das mit folgender Formel berechnet werden kann: /2

$$P(G) = \binom{180}{0} \cdot 0{,}03^0 \cdot 0{,}97^{180} + \binom{180}{1} \cdot 0{,}03^1 \cdot 0{,}97^{179}$$

d) In einer Bahn mit 20 Fahrgästen befinden sich 3 Schwarzfahrer. Der Kontrolleur kontrolliert zwei Fahrgäste. Stelle das Baumdiagramm auf und berechne die Wahrscheinlichkeiten der vier möglichen Ereignisse. /4

Mathematik Jahrgangsarbeit 10

Schuljahr 2015/2016

Lösungen und mögliche Punkteverteilung

I. Analysis

Aufgabe I.1

a) $f'(x) = 3x^2 - 5\sin(x)$ [1VP]

b) $g'(x) = -x^{-2} + 0 = -\frac{1}{x^2}$ [1VP]

Aufgabe I.2

$x(2x^2 - 8x^3 - 10x) = 0$

$x_1 = 0$ [1VP]

$2x^2 - 8x^3 - 10x = 0$

$x_2 = -1$

$x_2 = 5$ [1VP]

Aufgabe I.3

Nullstelle 1 [0,5VP]

Nullstelle 2 [0,5VP]

Hochpunkt [0,5VP]

richtiger Verlauf [0,5VP]

Aufgabe I.4

a) Der Graph von f' hat an der Stelle $x_1 = 1$ eine positive Steigung. [1VP]

b) Der Graph von f' hat mindestens zwei Extremstellen. [1VP]

Aufgabe I.5

Ableitungen: $f'(x) = 6x^2 + 12x$ [0,5VP]

$f''(x) = 12x + 12$ [0,5VP]

$f'''(x) = 12$ [0,5VP]

f'(x) = 0 : $x_1=0$ [0,5VP]

$x_2=-2$ [0,5VP]

Überprüfung x_1: f''(0)= 12>0 → Minimum bei $x_1 = 0$ [0,5VP]

Überprüfung x_2: f''(-2)=-12<0 → Maximum bei $x_2 = -2$ [0,5VP]

f''(x) = 0 :	x_3=-1		[0,5VP]
Überprüfung x_3:	f'''(-1)= 12≠0	→ Wendestelle bei x_3 = -1	[0,5VP]
Hochpunkt:	f(-2)= 3	→ H(-2|3)	[0,5VP]
Wendepunkt:	f(-1)= -1	→ W(-1|-1)	[0,5VP]
Tiefpunkt:	f(0)= -5	→ H(0|-5)	[0,5VP]

Aufgabe I.6

$f(x) = 2 \cdot sin(\frac{\pi}{3} \cdot x) - 1$

Sinusfunktion[0,5VP], Amplitude: a=2[0,5VP], Periode: p=6→b= $\frac{\pi}{3}$[0,5VP], Verschiebung: d=-1[0,5VP]

Aufgabe I.7

$f'(x) = 6x^2 + 12x$

$f'(1) = 18$	→ y = 18x + c	[1VP]
$f(1) = 3$	→ 3 = 18·1 + c	
	→ c = -15	
	→ y = 18x - 15	[1VP]

Aufgabe I.8

$g(x) = -(x + 3)^4$

Spiegelung[1VP], Verschiebung[1VP]

Aufgabe I.9

Der Graph von f ist achsensymmetrisch zur y-Achse,

da alle Exponenten gerade sind bzw. da f(-x)=f(x). [1VP]

für x→-∞ : f(x)→-∞

für x→+∞ : f(x)→-∞ [1VP]

Aufgabe I.10

Das Essen kühlt während der ersten 20 Minuten nach dem Umfüllen um durchschnittlich etwa 0,8°C pro Minute ab. [1VP]

Das Essen kühlt 5 Minuten nach dem Umfüllen um etwa 1,2°C pro Minute ab. [1VP]

II. Analytische Geometrie

Aufgabe II.1

a) Koordinatensystem [1VP], Punkte [je 0,5VP], Dreieck [0,5VP] [3VP]

b) D(-5|-8|6) [2VP]

c) $\left|\overrightarrow{CB}\right| = \sqrt{21} \approx 4{,}58\ [LE]$ [1VP]

d) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ [2VP]

Aufgabe II.2

$$-3 \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ -18 \\ -15 \end{pmatrix}$$ [1VP]

I.	2-7r	=	-1,5	→ r=0,5
II.	6r	=	3	→ r=0,5
III.	-3+5r	=	-0,5	→ r=0,5 [1VP]

Aufgabe II.3

$\sqrt{1622} \approx 40{,}27\ [Meter\ pro\ Sekunde]$ [1VP]

$40{,}27 : 100 \cdot 60 \cdot 60 \approx 145\ [Kilometer\ pro\ Stunde]$ [1VP]

III. Wahrscheinlichkeitsrechnung

Aufgabe III

a) $\mu = 220 \cdot 0{,}03 = 6{,}6 \approx 7$

Er kann mit etwa 7 Schwarzfahrern pro Tag rechnen. [1VP]

b) n=400 p=0,03 [1VP]

P(A) = P(X=12) ≈ 11,6% [1VP]

P(B) = P(X≤5) ≈ 1,9% [1VP]

P(C) = 1- P(X≤15) ≈ 15,2% [1VP]

P(D) = P(X≤14) - P(X≤9) ≈ 53,6% [1VP]

c) E: Er erwischt an einem Nachmittag maximal einen Schwarzfahrer. [2VP]

d) Baumdiagramm mit richtiger Beschriftung [2VP]

S: Schwarzfahrer K: kein Schwarzfahrer

$P(SS) = \frac{3}{20} \cdot \frac{2}{19} \approx 1{,}6\%$ [0,5VP]

$P(SK) = \frac{3}{20} \cdot \frac{17}{19} \approx 13{,}4\%$ [0,5VP]

$P(KS) = \frac{17}{20} \cdot \frac{3}{19} \approx 13{,}4\%$ [0,5VP]

$P(KK) = \frac{17}{20} \cdot \frac{16}{19} \approx 71{,}6\%$ [0,5VP]

Mathematik Jahrgangsarbeit 10

Schuljahr 2015/2016

Notenschlüssel

	Note
ab 43,5	**1**
ab 41,5	**1-**
ab 40	**1-2**
ab 38	**2+**
ab 36	**2**
ab 34,5	**2-**
ab 32,5	**2-3**
ab 31	**3+**
ab 29	**3**
ab 27	**3-**
ab 25,5	**3-4**
ab 23,5	**4+**
ab 22	**4**
ab 19,5	**4-**
ab 17	**4-5**
ab 14,5	**5+**
ab 12	**5**
ab 10	**5-**
ab 7,5	**5-6**
ab 5	**6+**
weniger als 5	**6**