Lernziele zur Jahrgangsarbeit 10

Schuljahr 2017/2018

I. Analysis

① Du kannst die Ableitung einer Funktion bestimmen. [Summenregel, Faktorregel, Ableitung von x^z, sin(x) und cos(x)]

② Du kannst Gleichungen lösen. [p-q-Formel oder a-b-c-Formel, Faktorisieren, Substituieren]

③ Du kannst zu einem gegebenen Graphen einer Funktion den Graphen der zugehörigen Ableitung skizzieren.

④ Du kannst den Graphen einer Funktion, den Graphen der ersten Ableitung und den Graphen der zweiten Ableitung deuten. [$f \rightarrow f'$; $f'' \mid f' \rightarrow f$; $f'' \mid f'' \rightarrow f$; f']

⑤ Du kannst ganzrationale Funktionen auf Extremstellen und Wendestellen untersuchen.

⑥ Du kannst die Funktionsvorschrift einer trigonometrischen Funktion aus dem Schaubild herleiten. [Amplitude, Periode, Verschiebung in x- und y-Richtung]

⑦ Du kannst die Gleichung der Tangente an den Graphen einer ganzrationalen Funktion an einer gegebenen Stelle aufstellen.

⑧ Du kannst die Funktionsvorschrift einer Funktion so verändern, dass der Graph in x-Richtung oder y-Richtung um eine gegebene Anzahl von LE verschoben, mit einem gegebenen Faktor gestreckt oder an den Koordinatenachsen gespiegelt wird.

⑨ Du kannst ganzrationale Funktionen auf Symmetrie [Achsensymmetrie zur y-Achse und Punktsymmetrie zum Ursprung] untersuchen und das Verhalten ihrer Funktionswerte für $x \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow +\infty$ angeben.

⑩ Du kannst die Bedeutung der mittleren und momentanen Änderungsrate einer Funktion bei Anwendungsaufgaben beschreiben.

II. Analytische Geometrie

① Du kannst Punkte, Strecken und Geraden in ein geeignetes räumliches Koordinatensystem zeichnen.

② Du kannst mit Vektoren rechnen. [Addition, Skalarmultiplikation, Länge]

③ Du kannst die Gleichung einer Geraden aufstellen. [Gerade durch zwei Punkte, parallele Gerade]

④ Du kannst die Lage zweier Geraden untersuchen (parallel, identisch, windschief, schneidend) und gegebenenfalls den Schnittpunkt berechnen.

⑤ Du kannst geradlinige Bewegungen mit Hilfe von Geraden modellieren und die Geschwindigkeit einer geradlinigen Bewegung bei gegebener Gleichung bestimmen.

III. Wahrscheinlichkeitsrechnung

① Du kannst den Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsvariable berechnen und deuten.

② Du kannst die Wahrscheinlichkeit für genau x Treffer bei einer binomialverteilten Zufallsvariable berechnen. [Binomialpdf]

③ Du kannst die Wahrscheinlichkeit für mindestens, mehr als, höchstens und weniger als x Treffer bei einer binomialverteilten Zufallsvariable berechnen. [Binomialcdf]

④ Du kannst mit der Bernoulli-Formel umgehen.

⑤ Du kannst ein Baumdiagramm zeichnen und die Pfadregeln anwenden.

Mathematik Jahrgangsarbeit 10

Schuljahr 2017/2018 Bearbeitungszeit: 90 Minuten zugelassenes Hilfsmittel: WTR

Name: **Punkte: / 48** **Ø:** **Note:**

I. Analysis /24

Aufgabe I.1 /2

Bestimme die Ableitung.

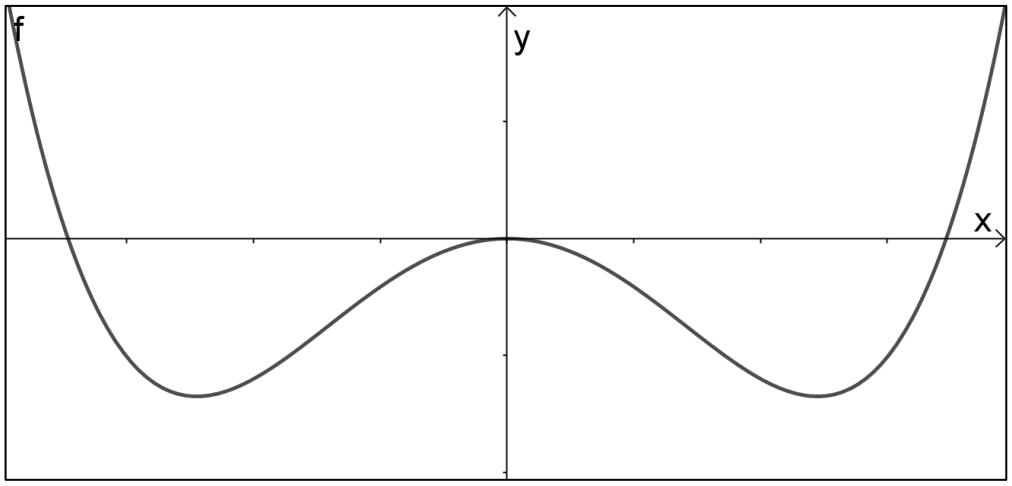
a) $f(x) = 5x^4 - cos(x)$ b) $g(x) = x + \sqrt{x}$

Aufgabe I.2 /2

Löse die Gleichung: $x^4 = 6x^2 + 27$

Aufgabe I.3 /2

Skizziere die Ableitung in das gleiche Koordinatensystem.



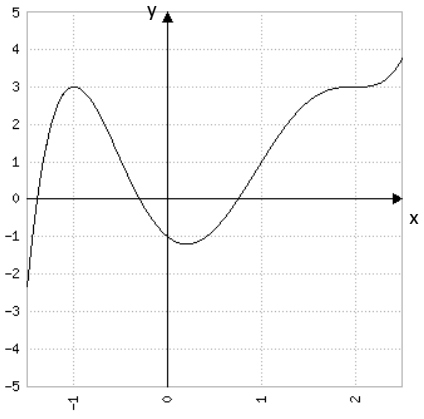
Aufgabe I.4 /2

Die Abbildung rechts zeigt den Graphen einer Funktion f.

Begründe, warum folgende Aussagen falsch sind.

a) f'(1) < 0.

b) Der Graph von f" hat keine Nullstelle.

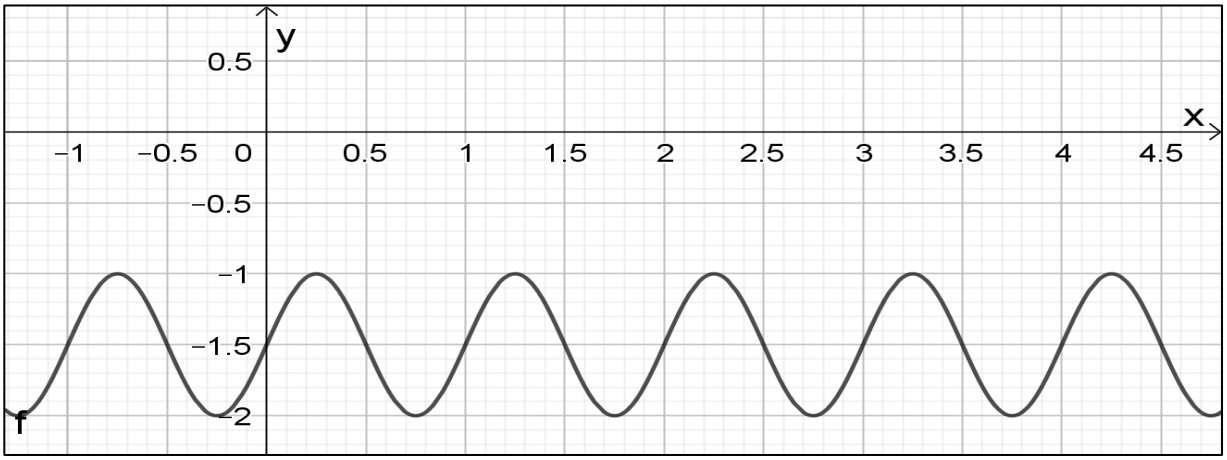


Aufgabe I.5 **/6**

Untersuche die Funktion $f(x) = 2x^4 - 4x^2$ auf Extremstellen und Wendestellen.

Aufgabe I.6 **/2**

Gib zum Graph in der Abbildung eine mögliche Funktionsvorschrift an.



Aufgabe I.7 **/2**

Berechne die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion $f(x) = x^4 - x^2$ an der Stelle x_0=2.

Aufgabe I.8 **/2**

Der Graph der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ soll mit dem Faktor 2 in y-Richtung gestreckt und anschließend um 5 LE in negative y-Richtung verschoben werden. Gib die zu dem entstandenen Graphen passende Funktionsvorschrift g(x) an.

Aufgabe I.9 **/2**

Untersuche die Funktion $f(x) = 8x + 7x^3$ auf Symmetrie und gib das Verhalten der Funktionswerte für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$ an.

Aufgabe I.10 **/2**

Das sich in einer Regentonne befindende Wasser kann näherungsweise beschrieben werden durch die Funktion f(t) mit t in Minuten nach Beobachtungsbeginn und f(t) in Litern. Interpretiere die Ergebnisse der folgenden Berechnungen:

a) $\frac{f(15)-f(0)}{15} \approx 3{,}8$ b) $f'(5) \approx 7{,}9$

II. Analytische Geometrie /12

Aufgabe II.1 **/7**

Gegeben sind die Punkte P(3|-1|1) und Q(1|2|7).

a) Zeichne die Strecke $\overline{PQ}$ in ein geeignetes räumliches Koordinatensystem.

b) Berechne den Abstand der Punkte P und Q.

In einem Modell beschreibt die x_1x_2-Ebene die Erdoberfläche und die Punkte P und Q beschreiben die Lage eines Heißluftballons (Mittelpunkt der Korb-Bodenfläche) zu zwei unterschiedlichen Zeitpunkten. Eine Längeneinheit im Modell entspricht 10 Metern in Wirklichkeit. Zu Beobachtungsbeginn befindet sich der Heißluftballon bei Punkt P. Er bewegt sich geradlienig mit gleichbleibender Geschwindigkeit und befindet sich sieben Sekunden später bei Punkt Q.

c) Berechne die Geschwindigkeit des Heißluftballons und gib sie in der Einheit *Kilometer pro Stunde* an.

d) Gib die Gleichung der Geraden an, welche die Lage des Heißluftballons nach t Sekunden beschreibt, der sich mit gleicher Geschwindigkeit und Richtung weiterbewegt.

Aufgabe II.2 **/5**

Bestimme die gegenseitige Lage der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -17 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

und bestimme gegebenenfalls den Schnittpunkt.

III. Wahrscheinlichkeitsrechnung /12

Aufgabe III

In einer Backfabrik werden unter anderem Rosinenbrötchen gebacken und anschließend an unterschiedliche Filialen ausgeliefert. Aufgrund eines technischen Problems enthalten 5% aller gebackenen Rosinenbrötchen keine Rosinen. Rosinenbrötchen ohne Rosinen werden im Folgenden als *falsche Brötchen*, Rosinenbrötchen mit Rosinen als *echte Brötchen* bezeichnet. Die falschen Brötchen sind zufällig unter allen Rosinenbrötchen verteilt.

a) Mit wie vielen falschen Brötchen kann eine Filialleiterin rechnen, wenn sie von der Fabrik 160 Rosinenbrötchen bezieht. /1

b) Ein andere, kleinere Filiale bezieht nur 40 Rosinenbrötchen. Berechne die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse. /6

A: Die Filiale erhält genau 2 falsche Brötchen.

B: Die Filiale erhält höchstens 3 falsche Brötchen.

C: Die Filiale erhält nur echte Brötchen.

D: Die Filiale erhält mindestens 5 falsche Brötchen.

E: Die Filiale erhält zwei bis sechs falsche Brötchen.

c) Gib ein Ereignis F an, das mit folgender Formel berechnet werden kann: /2

$$P(F) = 1 - 0{,}95^{100} - \binom{100}{1} \cdot 0{,}05^1 \cdot 0{,}95^{99}$$

d) Ein Mitarbeiter der Fabrik isst zur Kontrolle drei Rosinenbrötchen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit isst er genau zwei echte Brötchen hintereinander? Stelle das Baumdiagramm auf, markiere die entsprechenden Pfade und berechne mit Hilfe der Pfadregeln die gesuchte Wahrscheinlichkeit. /3

Mathematik Jahrgangsarbeit 10

Schuljahr 2017/2018

Lösungen und mögliche Punkteverteilung

I. Analysis

Aufgabe I.1

a) $f'(x) = 20x^3 + \sin(x)$ [1VP]

b) $g'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ [1VP]

Aufgabe I.2

$Sustitution$: $x^2 = z$

$z_1 = 9 \ oder \ z_2 = -3$ [1VP]

$Resubstition$:

$x_1 = \ 3 \ oder \ x_2 = -3$ [1VP]

Aufgabe I.3

Nullstellen [1VP]

Extrempunkte und richtiger Verlauf [1VP]

Aufgabe I.4

a) Der Graph von f hat an der Stelle $x_1 = 1$ eine positive Steigung. Somit ist $f'(1) > 0$. [1VP]

b) Der Graph von f hat eine Wendestelle an der Stelle $x_1 \approx 1$. Somit ist $f''(x_1)=0$. [1VP]

Aufgabe I.5

Ableitungen: $f'(x) = 8x^3 - 8x$

$f''(x) = 24x^2 - 8$

$f'''(x) = 48x$ [1VP]

$f'(x) = 0$: $x_1=0$

$x_2=1$

$x_3=-1$ [1,5VP]

Überprüfung x_1: $f''(0)= -8 < 0$ → Maximum bei $x_1 = 0$

Überprüfung x_2: $f''(1)=16 > 0$ → Minimum bei $x_2 = 1$

Überprüfung x_3: $f''(-1)=16 > 0$ → Minimum bei $x_3 = -1$ [1,5VP]

f''(x) = 0 : $x_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$x_5 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Überprüfung x_4: $f'''(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{48}{\sqrt{3}} \neq 0$ → Wendestelle bei $x_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Überprüfung x_5: $f'''(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{48}{\sqrt{3}} \neq 0$ → Wendestelle bei $x_5 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ [2VP]

Aufgabe I.6

$f(x) = 0{,}5 \cdot sin(2\pi \cdot x) - 1{,}5$

Sinusfunktion [0,5VP], Amplitude [0,5VP], Periode [0,5VP], Verschiebung [0,5VP]

Aufgabe I.7

$f'(x) = 4x^3 - 2x$

$f'(2) = 28$ → y = 28x + c [1VP]

$f(2) = 12$ → 12 = 28·2 + c

→ c = -44

→ y = 2x - 44 [1VP]

Aufgabe I.8

$g(x) = 2\sqrt{x} - 5$

Streckung[1VP], Verschiebung[1VP]

Aufgabe I.9

Der Graph von f ist punktsymmetrisch zum Ursprung,

da alle Exponenten ungerade sind bzw. da f(-x)=-f(x). [1VP]

für $x \to -\infty$: $f(x) \to -\infty$

für $x \to +\infty$: $f(x) \to +\infty$ [1VP]

Aufgabe I.10

In den ersten 15 Minuten fließen durchschnittlich etwa 3,8 Liter Wasser pro Minute in die Tonne. [1VP]

Nach 5 Minuten fließen etwa 7,9 Liter Wasser pro Minute in die Tonne. [1VP]

II. Analytische Geometrie

Aufgabe II.1

a) Koordinatensystem [1VP], Punkte [je 0,5VP] und Strecke [0,5 VP] [2,5VP]

b) $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{49} \approx 7\ [LE]$ [1,5VP]

c) $10\frac{m}{s} = 36\frac{km}{h}$ [1VP]

d) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix}$ [2VP]

Aufgabe II.2

$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq x \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ → Die Geraden g und h schneiden sich oder sind windschief. [1VP]

$\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

III. 0 = 3-s → s=3 [1VP]

in II. -4-2r = 0 → r=-2 [1VP]

in I. 6 -2·1 = -17+3·(7) → Die Geraden g und h schneiden sich. [1VP]

$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ → Die Geraden g und h schneiden sich im Punkt S(4|0|0). [1VP]

III. Wahrscheinlichkeitsrechnung

Aufgabe III

a) $\mu = 160 \cdot 0{,}05 = 8$

Sie kann mit etwa 8 falschen Brötchen rechnen. [1VP]

b) X: Anzahl der falschen Brötchen n=40 p=0,05

P(A) = P(X=2) ≈ 27,8% [1VP]

P(B) = P(X≤3) ≈ 86,2% [1VP]

P(C) = P(X=0) ≈ 12,9% [1VP]

P(D) = 1 - P(X≤4) ≈ 1 – 0,952 = 4,8% [1,5VP]

P(E) = P(X≤6) – P(X≤1) ≈ 0,997 – 0,399 = 59,8% [1,5VP]

c) F: Eine Filiale, die 100 Rosinenbrötchen bezieht, erhält mindestens 2 falsche Brötchen. [2VP]

d) Baumdiagramm mit richtiger Beschriftung [1VP]

F: falsches Brötchen E: echtes Brötchen

$P(EFF) + P(FEE) = 0{,}95^2 \cdot 0{,}05 + 0{,}05 \cdot 0{,}95^2 \approx 9{,}0\%$ [2VP]

Mathematik Jahrgangsarbeit 10

Schuljahr 2017/2018

Notenschlüssel

	Note
ab 43,5	**1**
ab 41,5	**1-**
ab 40	**1-2**
ab 38	**2+**
ab 36	**2**
ab 34,5	**2-**
ab 32,5	**2-3**
ab 31	**3+**
ab 29	**3**
ab 27	**3-**
ab 25,5	**3-4**
ab 23,5	**4+**
ab 22	**4**
ab 19,5	**4-**
ab 17	**4-5**
ab 14,5	**5+**
ab 12	**5**
ab 10	**5-**
ab 7,5	**5-6**
ab 5	**6+**
weniger als 5	**6**