

# Mathematik Jahrgangsarbeit 10



Schuljahr 2018/2019

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

zugelassenes Hilfsmittel: WTR

Name:

Punkte:

/ 48

Ø:

Note:

## I. Analysis

/24

### Aufgabe I.1

/2

Bestimme die Ableitung.

a)  $f(x) = \cos(x) + \frac{3}{4}x^4$

b)  $g(x) = \frac{1}{x^2} + x$

### Aufgabe I.2

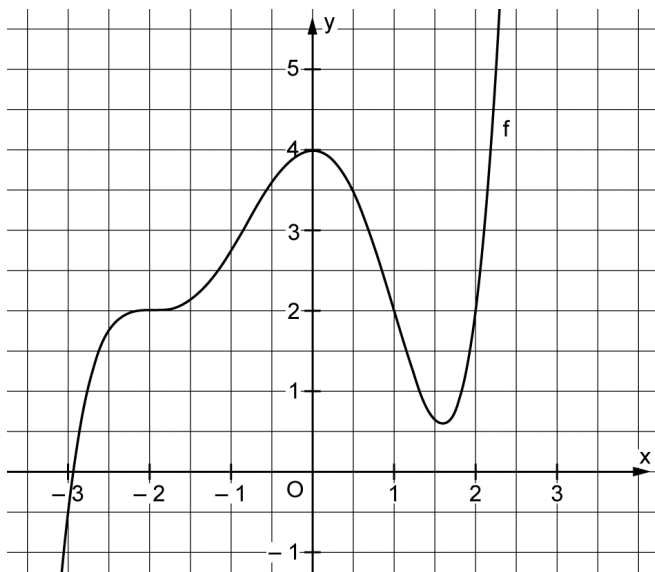
/4

Löse die Gleichung:  $-\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 - 4 = 0$ .

### Aufgabe I.3

/2

Skizziere die Ableitung der Funktion  $f$  in das gleiche Koordinatensystem.



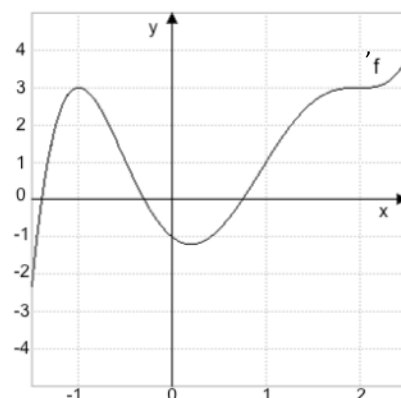
### Aufgabe I.4

/3

Die Abbildung zeigt den Graphen einer ganzrationalen Funktion  $f'$ .

Begründe die Richtigkeit der folgenden Aussagen:

- a) Die Funktion  $f$  hat im dargestellten Intervall genau drei Extremstellen.
- b) Die Nullstelle der Ableitung  $f''$  an der Stelle  $x = 2$  hat eine gerade Vielfachheit.
- c)  $f(-1) < f(-0,5)$



**Aufgabe I.5**

/7

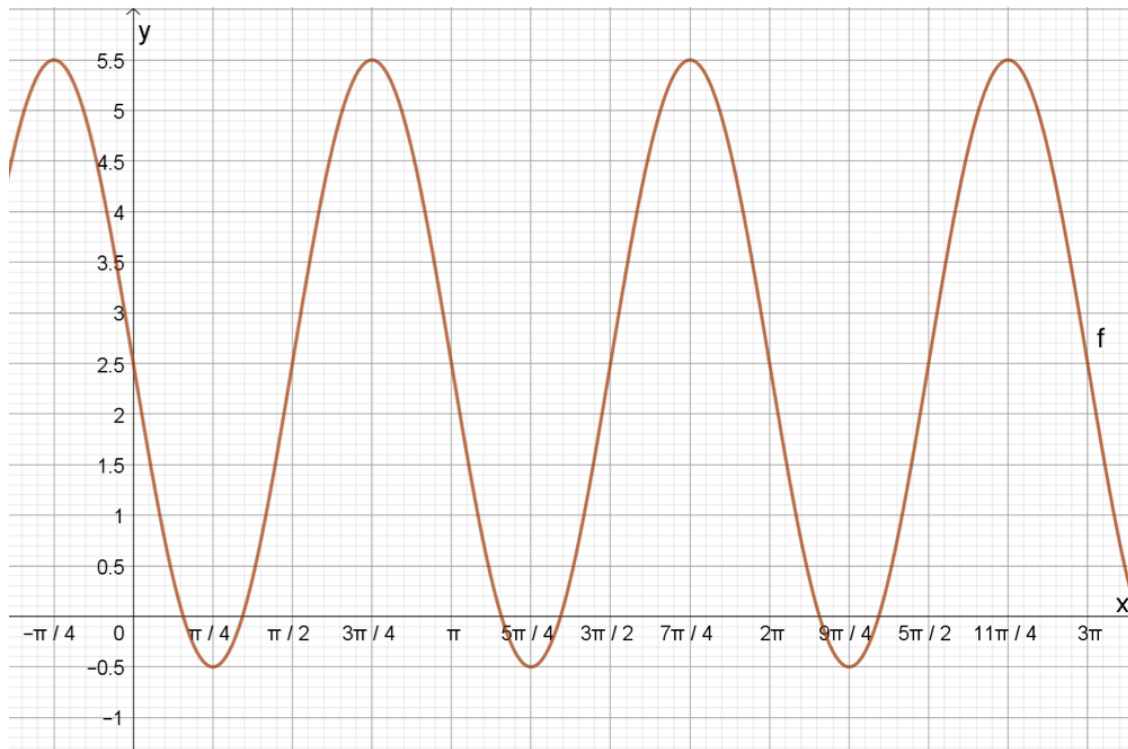
Gegeben ist die Funktion  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$ .

- a) Untersuche die Funktion  $f$  auf Extrem- und Wendestellen.
- b) Bestimme die Gleichung der Tangente an der Stelle  $x = -1$ .
- c) Bestimme die Symmetrie des Graphen der Funktion  $f$ .
- d) Gib ihr Verhalten für  $x$  gegen  $\pm \infty$  an.

**Aufgabe I.6**

/4

- a) Gegeben ist der Graph der Funktion  $f(x)$ . Gib einen möglichen Funktionsterm für die Funktion  $f$  an.



- b) Der Graph der Funktion  $g(x)$  geht durch Strecken und Verschieben aus der Sinusfunktion hervor. Der Graph der Funktion  $g(x)$  hat eine Amplitude von 4 und eine Periodenlänge von 2. Außerdem schneidet er die  $y$ -Achse bei  $-\pi$ . Gib einen möglichen Funktionsterm für die Funktion  $g(x)$  an.

**Aufgabe I.7**

/2

Die Größe einer Kressepflanze kann näherungsweise durch die Funktion  $f(t)$  beschrieben werden. Die Größe der Kressepflanze  $f(t)$  wird dabei in  $cm$  angegeben, die Zeit  $t$  in Tagen nach der Aussaat ( $t \geq 0$ ).

Interpretiere folgende Aussagen:

a)  $\frac{f(5)-f(0)}{5-0} \approx 1,2$

b)  $f'(8) \approx 0,8$

**Aufgabe II.1**

/4

Ein Segelflugzeug befindet sich zu Beobachtungsbeginn in  $P(-2 | 12 | 8,5)$  und eine Sekunde später in  $Q(-5 | 6 | 3,5)$  (Koordinaten in  $m$ ;  $x_3$ -Koordinate: Höhe über dem Boden).

- a) Gib die Zeit-Ort-Gleichung (Geradengleichung) für den Weg des Segelflugzeugs an.
- b) Gib die Position des Segelflugzeugs nach 0,5 Sekunden an.  
In welcher Höhe über dem Boden befindet sich das Flugzeug zu diesem Zeitpunkt?

**Aufgabe II.2**

/8

- a) Bestimme eine Geradengleichung für die Gerade  $h$ . Sie verläuft parallel zu der Geraden  $g$  durch die Punkte  $A(-3 | 3 | -1)$  und  $B(-5 | -1 | 3)$  und geht durch den Punkt  $C(-4 | -1 | 8)$ .
- b) Zeichne die Gerade  $g$  in ein geeignetes räumliches Koordinatensystem.
- c) Bestimme die gegenseitige Lage der Geraden  $a$  und  $b$  und bestimme gegebenenfalls den Schnittpunkt.

$$\text{a: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{b: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe III****/12**

Bei einem Schulfest verkauft die SMV ein Glas selbstgemachte Limo für 3€. Sie bietet ein Spiel an, bei dem man ein Glücksrad mit vier gleich großen Feldern und den Nummern 1 bis 4 drehen kann. Zuerst dreht der SMV-Vertreter Florian, dann darf der Kunde drehen. Hat der Kunde eine höhere Zahl als die SMV, muss er nicht bezahlen.

- a) Skizziere ein Baumdiagramm für das zweimalige Drehen des Glücksrads – von Florian und vom Kunden. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Kunde nichts bezahlen muss.

Wir nehmen nun an, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Kunde nichts bezahlen muss, ist  $\frac{3}{8}$ .

Eine Familie mit vier Kindern kauft insgesamt 12 Limos, darf also zwölfmal drehen.

- b) Die folgende Gleichung gibt die Berechnung einer Wahrscheinlichkeit in diesem Sachzusammenhang an:

$$P(E) = \binom{12}{12} \left(\frac{3}{8}\right)^{12} + \binom{12}{11} \left(\frac{3}{8}\right)^{11} \cdot \left(\frac{a}{8}\right)^1$$

Gib einen geeigneten Wert für  $a$  an und beschreibe das entsprechende Ereignis  $E$ .

- c) Berechne die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

$F$ : Genau 2 der Limos sind kostenlos.

$G$ : Höchstens 2 der Limos sind kostenlos.

$H$ : Mehr als 8 der Limos sind kostenlos.

$K$ : Mindestens 2 und höchstens 8 Limos sind kostenlos.

- d) Max behauptet, man könne erwarten, dass man bei 12 Limos mindestens 4 frei bekommt. Sein Bruder Leo aber sagt, er erwarte weniger als 4. Was sagst du dazu? Begründe deine Einschätzung.

## I. Analysis

### Aufgabe I.1

a)  $f'(x) = -\sin(x) + 3x^3$  [1,0 VP]

b)  $g'(x) = -\frac{2}{x^3} + 1$  [1,0 VP]

### Aufgabe I.2

$$-\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 - 4 = 0$$

Substitution:  $z = x^2$  [0,5 VP]

$$-\frac{1}{4}z^2 + 2z - 4 = 0$$
 [0,5 VP]

$$z_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot (-4)}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{-\frac{1}{2}} = 4$$
 [2,0 VP]

Resubstitution:  $x = \sqrt{z}$  [0,5 VP]

$$x_{1/2} = \pm 2$$
 [0,5 VP]

### Aufgabe I.3

drei Nullstellen bei  $x = -2$ ,  $x = 0$  und  $x \approx 1,7$  [1,0 VP]

zwei Extremstellen  $x = -2$ ,  $x = -1$  und  $x \approx 1$  [0,5 VP]

richtiger Verlauf (steigende und fallende Intervalle) [0,5 VP]

### Aufgabe I.4

a) Im dargestellten Intervall hat  $f'$  drei Nullstellen mit VZW  
→  $f$  hat drei Extremstellen [1,0 VP]

b) Der Graph von  $f'$  hat an der Stelle  $x = 2$  einen Sattelpunkt  
→  $f''$  hat an der Stelle  $x = 2$  eine Nullstelle mit grader Vielfachheit [1,0 VP]

c) Der Graph von  $f'$  liegt im Intervall von  $[-1; -0,5]$  oberhalb der  $x$ -Achse  
→ Der Graph von  $f$  steigt monoton  
→  $f(-1) < f(-0,5)$  [1,0 VP]

### Aufgabe I.5

a)  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$   
 $f'(x) = 6x^2 - 6x$   
 $f''(x) = 12x - 6$   
 $f'''(x) = 12$  [1,0 VP]

Extremstellen:

$$\begin{array}{llll} f'(x) = 6x^2 - 6x = 0 & \rightarrow x_1 = 0 & f''(0) = -6 & \rightarrow \text{Maximum} \\ & \rightarrow x_2 = 1 & f''(1) = +6 & \rightarrow \text{Minimum} \end{array} \quad [1,5 \text{ VP}]$$

Wendestellen:

$$f''(x) = 12x - 6 = 0 \quad \rightarrow x_3 = 0,5 \quad f'''(0,5) = 12 \quad \rightarrow \text{Wendestelle} \quad [1,0 \text{ VP}]$$

b) Wendetangente an der Stelle  $x = -1$ :

$$t: y = mx + c$$

$$m = f'(-1) = 12 \quad [0,5 \text{ VP}]$$

$$f(-1) = 0$$

$$t: 0 = 12 \cdot (-1) + c \rightarrow c = 12 \quad [0,5 \text{ VP}]$$

$$t: y = 12x + 12 \quad [0,5 \text{ VP}]$$

c) Symmetrieverhalten:

Es liegt keine besondere Symmetrie vor (entweder  $f(-x)$  oder Exponenten) [1,0 VP]

d) Verhalten im Unendlichen:

$$\text{für } x \rightarrow +\infty \text{ gilt: } f(x) \rightarrow +\infty \quad [0,5 \text{ VP}]$$

$$\text{für } x \rightarrow -\infty \text{ gilt: } f(x) \rightarrow -\infty \quad [0,5 \text{ VP}]$$

## Aufgabe I.6

a)  $f(x) = 3 \sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) + 2,5$  oder  $f(x) = -3 \sin(2x) + 2,5$  [2,0 VP]

b)  $g(x) = 4 \sin(\pi \cdot x) - \pi$  [2,0 VP]

## Aufgabe I.7

a) Die Kresse ist in den ersten 5 Tagen nach der Aussaat durchschnittlich  $1,2 \frac{\text{cm}}{\text{Tag}}$  gewachsen. [1,0 VP]

b) Die Kresse hat nach genau 8 Tagen eine Wachstumsgeschwindigkeit von  $0,8 \frac{\text{cm}}{\text{Tag}}$ . [1,0 VP]

## II. Analytische Geometrie

### Aufgabe II.1

- a)  $X = \begin{pmatrix} -2 \\ 12 \\ 8,5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix}$  [2,0 VP]
- b)  $\begin{pmatrix} -2 \\ 12 \\ 8,5 \end{pmatrix} + 0,5 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3,5 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} \rightarrow$  Das Segelflugzeug befindet sich 6m über dem Boden. [2,0 VP]

## Aufgabe II.2

- a)  $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$  [0,5 VP]

Geradengleichung  $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$  [1,0 VP]

- b) Koordinatensystem mit richtiger Skalierung und Beschriftung der Achsen [1,0 VP]

Punkte und Gerade in Koordinatensystem einzeichnen [1,0 VP]

- c) Die Geraden sind windschief oder schneiden sich, da die Richtungsvektoren linear

unabhängig sind:  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \neq k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$  für alle  $k \in \mathbb{R}$

LGS I  $4 + 1r = 8 + 1s$

II  $2 + 2r = 3 - 5s$

III  $0 + 3r = 11 + 2s$

I'  $r = 4 + 1s$  in Gleichung II einsetzen:  $2 + 2 \cdot (4 + 1s) = 3 - 5s$  ergibt  $s = -1$  [1,5 VP]

und  $r = 4 + 1 \cdot (-1) = 3$  [1,0 VP]

Kontrolle in Gleichung III ergibt  $3 \cdot 9 = 11 + 2 \cdot (-1)$  eine richtige Lösung [0,5 VP]

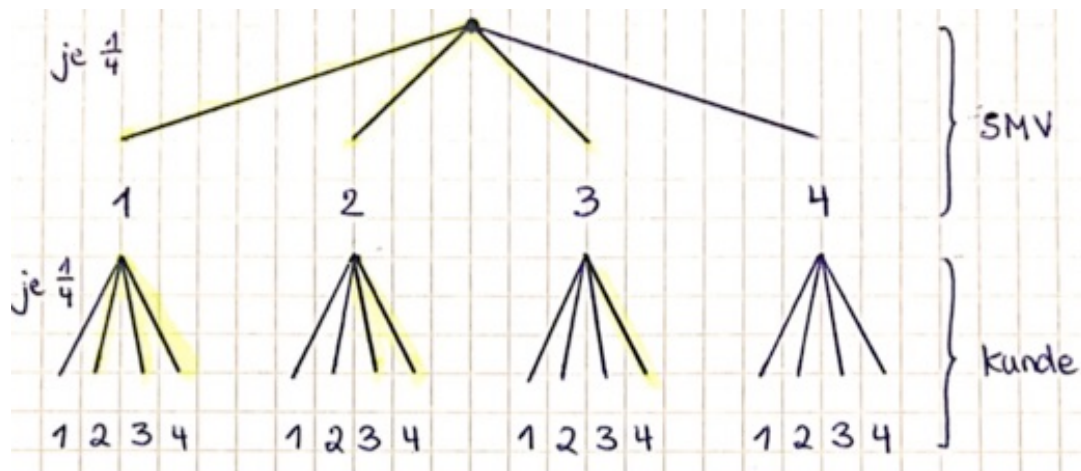
$\rightarrow$  die Geraden  $g$  und  $h$  schneiden sich [0,5 VP]

$\vec{s} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \rightarrow$  der Schnittpunkt lautet  $S(7|8|9)$  [1,0 VP]

### III. Wahrscheinlichkeitsrechnung

#### Aufgabe III

a) [2,0 VP]



$$P(\text{Kunde bezahlt nichts}) = 6 \cdot \frac{1}{16} = \frac{3}{8} \quad [1,0 \text{ VP}]$$

b)  $a = 5$  [1,0 VP]

$E$ : „Der Kunde muss für mindestens 11 Limos nichts bezahlen“. [1,0 VP]

c)  $F$ :  $P(X = 2) \approx 8,44\%$  [1,0 VP]

$G$ :  $P(X \leq 2) \approx 11,35\%$  [1,0 VP]

$H$ :  $P(X \geq 8) = 1 - P(X < 8) \approx 0,95\%$  [1,0 VP]

$K$ :  $P(2 \leq X \leq 8) = P(X \leq 8) - P(X \leq 1) \approx 96,14\%$  [2,0 VP]

d)  $\mu = n \cdot p = 12 \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{2} = 4,5 \geq 4$  [1,0 VP]

→ die Behauptung von Max stimmt [1,0 VP]



|               | Note |
|---------------|------|
| ab 43,5       | 1    |
| ab 41,5       | 1-   |
| ab 40         | 1-2  |
| ab 38         | 2+   |
| ab 36         | 2    |
| ab 34,5       | 2-   |
| ab 32,5       | 2-3  |
| ab 31         | 3+   |
| ab 29         | 3    |
| ab 27         | 3-   |
| ab 25,5       | 3-4  |
| ab 23,5       | 4+   |
| ab 22         | 4    |
| ab 19,5       | 4-   |
| ab 17         | 4-5  |
| ab 14,5       | 5+   |
| ab 12         | 5    |
| ab 10         | 5-   |
| ab 7,5        | 5-6  |
| ab 5          | 6+   |
| weniger als 5 | 6    |